Examen de Análisis de Variable Compleja
Cuarto curso de Matemáticas
12 de septiembre de 1998

1. Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{iy : y \in \mathbb{R},\ |y| \geq 1\}$. Pruébese que existe una función f holomorfa en Ω que verifica:

$$\operatorname{sen} f(z) = z \cos f(z) \ \ \forall z \in \Omega, \quad f(x) = \operatorname{arc\,tg} x \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Compruébese que $f'(z) = \dfrac{1}{1+z^2}, \ \ \forall z \in \Omega$ y dedúzcase que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} \ \ \forall z \in D(0,1).$$

2. Sea f una función polinómica de grado $n \geq 1$. Supongamos que $|f(z)| \leq 1$ siempre que $|z| = 1$. Pruébese que $|f(z)| \leq |z|^n$ siempre que $|z| \geq 1$.

3. Integrando la función $z \mapsto \dfrac{\log(z)}{1+z^3}$ a lo largo de la frontera del conjunto

$$\{z \in \mathbb{C} : \varepsilon < |z| < R,\ 0 < \arg(z) < 2\pi/3\} \quad (0 < \varepsilon < 1 < R)$$

calcular las integrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log(x)}{1+x^3}\, dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3}\, dx.$$

4. Calcúlese el número de ceros del polinomio

$$P(z) = 2z^6 - z^3 + 4z + 1$$

en el semiplano de la derecha.

5. Calcúlense todos los isomorfismos conformes del dominio

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z+1| < \sqrt{2},\ |z-1| < \sqrt{2}\}$$

sobre el disco unidad que dejan fijo el punto $z = 0$.

6. Sea $\mathcal{F}$ un conjunto de funciones holomorfas en $D(0,1)$ verificando que:

a) $\operatorname{Re} f(z) > 0$ para todo $z \in D(0,1)$ y para toda $f \in \mathcal{F}$;

b) El conjunto $\{f(0) : f \in \mathcal{F}\}$ está acotado.

Pruébese que $\mathcal{F}$ es relativamente compacto en $\mathcal{H}(D(0,1))$.